

dr hab. Jacek Wawrzosek
dr Szymon Ignaciuk
dr Andrzej Bochniak

Katedra Zastosowań Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Przyrodniczy w Lublinie
Ul. Głęboka 28, 20-612 Lublin, Poland
E-mails: jacek.wawrzosek@up.lublin.pl, szymon.ignaciuk@up.lublin.pl (corresponding author), andrzej.bochniak@up.lublin.pl

Wybrane problemy niejednoznaczności ceny dualnej wody w postoptymalizacyjnej analizie systemu wodociągów

Słowa kluczowe: sieć dystrybucji wody, cena dualna wody, proces eksploatacji, model gospodarowania wodą, postoptymalizacja

Streszczenie: W literaturze uważa się, że cena dualna wody jest obiektywną przesłanką do kształtowania rynkowej ceny wody. Jednak autorzy zauważają, że pojedynczy wektor cen dualnych w dystrybucji wody, gdy jest niejednoznaczny, nie powinien stać się podstawą do podejmowania decyzji zarówno normującej cenę wody jak i wpływającej na procedury modernizujące sieć wodociągową. Praca uczy inżynierów gospodarki wodnej by nie powielali powszechnych błędów oprogramowania oraz wskazuje jak, pomimo kompletnego braku literaturowych wskazówek, praktycznie rozwiązywać napotykanne problemy techniczne. Liniowa zależność wektorów wierszowych parametrów lewych stron wiążących warunków ograniczających w modelu programowania liniowego dla zużycia wody identyfikowana jest tu jako przyczyna niejednoznaczności wektorów cen dualnych. Ta niejednoznaczność w zagadnieniach dystrybucji wody wymaga kształtowania alternatywnych scenariuszy technicznych pozwalających na wariantowy wybór sposobu modyfikacji systemu poboru wody. Dlatego opisano zasady wyznaczania proporcjonalności jednoczesnych zmian niektórych parametrów prawych stron warunków ograniczających. Na uproszczonym modelu dystrybucji wody sformułowano i wskazano te zasady optymalnego doboru najbardziej produktywnych wektorów dla metody parametrycznego programowania liniowego. Opracowana w pracy metodyka umożliwia m.in. wygenerowanie alternatywnych scenariuszy technicznych oszczędzania różnej ilości wody, skutkującej różnymi oszczędnościami finansowymi.

1. Wstęp

1.1. Kształtowanie ceny wody celem zrównoważenia zapotrzebowania na wodę

Analiza przeprowadzona przez Bank Światowy [64] wskazuje, że niedobór wody w niektórych regionach może obniżyć PKB nawet o 6% i prowadzić do zwiększonej migracji, a w niektórych przypadkach do większego ryzyka konfliktu. Susze i okresy niedoboru wody stały się zjawiskiem powszechniejszym i częstszym w Europie [17]. Doświadczenia suszy w Europie w latach 2011, 2012, 2015 i 2018 były najgorsze od stulecia i dotyczyły nie tylko Europy Południowej i Zachodniej, ale także krajów w Europie Północnej (w tym Wielkiej Brytanii, Francji, Niemiec, Szwecji i Polski). Różnica między zaopatrzeniem w wodę a jej rosnącym popytem określa również kluczowe ograniczenia rozwoju gospodarczego Chin. Szacuje się, że przed 2005 r. z powodu niedoboru wody w produkcji, Chiny traciły rocznie 28 511 milionów \$. Brown [7] stwierdził, że niedługo niedobór wody w Chinach stanowić będzie zagrożenie dla globalnych potrzeb zbożowych. Dlatego woda wraz z ziarnem i ropą naftową są określane jako zasoby strategiczne. Stąd sugeruje się, że władze publiczne powinny kształtować

cenę wody dla użytkowników w celu odzwierciedlenia jej prawdziwego niedoboru lub kosztów alternatywnych [15].

1.2. Metody optymalizacji i postoptymalizacji w planowej eksploatacji zasobów wodnych

Metody optymalizacji i postoptymalizacji mogą być wykorzystane jako narzędzie pozwalające na dynamiczną korektę i doskonalenie eksploatacji złożonych systemów. Metody te wymagają dwóch podejść: matematycznego i menadżerskiego [29-30]. Narzędzia i zasady optymalizacji umożliwiły opracowanie modeli normatywnych dla optymalnego zarządzania systemami zasobów wodnych na dużą skalę, uwzględniających wszechobecną niepewność w prognozowaniu procesów naturalnych i skutków gospodarczych [13]. Liczne modele optymalizacji bywają wykorzystane do zapewnienia wysokich parametrów niezawodności sieci, parametrów niezawodności jakości wody, odpowiednich schematów operacyjnych uwzględniających liczne ograniczenia hydrauliczne w postaci: wysokości spiętrzony wody (*hydraulic head*), wycieków, zmiany zużycia energii pompy i sekwencyjnej dyskretnej pracy pompy przy tym minimalizującej koszty operacyjne. Większość modeli optymalizacji używa technik matematycznych, takich jak: programowanie liniowe (*LP*), programowanie dynamiczne (*DP*) i programowanie nieliniowe (*NLP*) lub ich wariacje [2, 10, 13-14, 19, 22, 25, 53]. Niektóre modele problemów niezawodności lub optymalizacji kosztu i czasu konserwacji sieci wodociągowej lub systemu kanalizacyjnego konstruowane są na gruncie statystyczno-stochastycznym [3, 38]. Romaniuk [44-46] prezentuje liczne eksperymenty numeryczne skupiające się np. na optymalizacji wartości oczekiwanej kosztów i czasu eksploatacji sieci wodociągowej, gdy parametrem decyzyjnym jest bezwarunkowy czas wymiany tzn. gdy lepiej jest wymienić fragment sieci zamiast dokonywać jego kolejnej, przyszłej naprawy.

Modele niezawodności, gotowości i bezpieczeństwa w połączeniu z programowaniem liniowym są użyteczne w identyfikacji oraz predykcji niezawodności, gotowości i bezpieczeństwa złożonych systemów technicznych, a także w optymalizacji i analizie kosztów eksploatacji tych systemów [28, 32-33, 66]. Wskazana tu niepewność obranych parametrów typowego modelu programowania liniowego wymaga, by oprócz procedury optymalizacyjnej, mieć łatwy dostęp do procedur postoptymalizacyjnych [56, 58].

Freire-González i in. [18] dokonują przeglądu literatury na temat istniejących badań dotyczących modeli przepływów międzygałęziowych (metody input-output) do oceny ekonomicznych skutków niedoboru wody podczas suszy oraz metod programowania liniowego wejścia-wyjścia (*IO-LP*) w podejściu do kwestii planowania zasobów wodnych w kontekście suszy i niedoboru wody. Gibbons [22] oraz Liu i in. [36] wskazują, że prawidłowe ustalanie cen dla zasobów wodnych odzwierciedlających ich rzeczywistą wartość jest bardzo ważne dla oszczędzania wody i dla złagodzenia niedoborów zasobów wodnych. Dalej uznają cenę dualną wody jako tą, która winna służyć do ilościowego określenia rzeczywistej wartości zasobów wodnych, odzwierciedlającego również ich niedobór. Czynią tak pomimo, że niekiedy twierdzi się, że praktycznie niemożliwe jest uzyskanie ceny dualnej wody poprzez rozwiązanie liniowego modelu programowania. Jednak Liu i in. [36] łącząc metodę analizy wejścia-wyjścia z metodą *LP* opracowali model z ograniczeniami dotyczącymi popytu końcowego, całkowitej produkcji, salda handlu i dostępności wody. Model ten posłużył do oszacowania ceny dualnej wody. Wyniki te stanowią cenne odniesienie do ustalenia racjonalnych cen wody przemysłowej i produktywnej w rejonach dziewięciu głównych dorzeczy chińskich. Przeglądu analogicznych badań modelowania wartości wody w różnych sektorach gospodarki w Afryce Południowej dokonują Nieuwoudt i Backeberg [42], a na świecie Conradie i Hoag [11]. Badania te przeprowadzono

w wyniku powstania zapotrzebowania na modele do pomiaru gotowości do zapłaty za wodę np. do nawadniania upraw rolnych.

1.3. Problemy programowania liniowego w modelowaniu zasobów wodnych

Typowy system zasobów wodnych składa się ze zbiorników wodnych, hydroelektrowni, nawadnianych gruntów, kanałów sztucznych i nawigacyjnych itp. będących w zasięgu rzeki lub dorzecza. Stąd optymalne planowanie wielozadaniowego systemu zasobów wodnych, czyli zaprojektowanie "najlepszego" systemu, który ma zostać zbudowany i wykorzystany w horyzoncie planowania, jest podporządkowane m. in. ograniczeniom technicznym, ekonomicznym, finansowym, społecznym i politycznym. Ograniczenia te obejmują sezonowe wahania zaopatrzenia w wodę, warunki geograficzne i geologiczne wybranych miejsc, istnienie kapitału, pożyczki, siłę roboczą i usługi lokalne, stopę procentową (i jej tendencje), plany rozwoju regionalnego itp. [25]. Cytowani autorzy wykorzystali model *LP* dla bardzo złożonego systemu zasobów wodnych uwzględniając szereg licznych ograniczeń związanych ze zbiornikiem, z nawadnianiem, z hydroelektrownią, ze sztucznymi ściekami i ograniczenia nawigacyjne. Przy tym badano przypadki rzek w południowej Argentynie, a te typowe problemy opisywało około 300 ograniczeń i 300 zmiennych. W takiej masie ograniczeń nie trudno natrafić na liniowo zależne wektory wierszowe parametrów lewych stron warunków ograniczających, a to już rodzi problemy przy analizowanej tu postoptymalizacji.

McKee i in. [41] opracowali model procesu eksploatacji warstwy wodonośnej przez ponad 900 odwiertów, poczynionych głównie na potrzeby przemysłu, zaopatrzenia komunalnego i nawadniania upraw w Arkansas. Uwzględnili 3 warianty modeli *LP* w celu symulacji zoptymalizowanych wpływów wody powierzchniowej i wody gruntowej przy jednoczesnym zachowaniu natężenia przepływu strumienia oraz licznych ograniczeń hydraulicznych. Również to złożone zagadnienie posiada wskazane powyżej problemy z liniową zależnością.

Techniki optymalizacji wielokryterialnej, np. dla skażonego obiektu wodonośnego, sprowadza się do optymalizacji jednokryterialnej poprzez zastosowanie metody ważonej sumy lub metody ograniczeń [16, 27, 40]. W ostatniej z tych metod optymalizuje się jedną z funkcji celu, wykorzystując inne funkcje celu jako ograniczenia, tj. włączając je do warunków ograniczających modelu, tym samym zwiększając liczbę ograniczeń. Prowadzi to zazwyczaj do analizowanego w obecnej pracy problemu liniowej zależności towarzyszącej nadmiernej liczbie warunków ograniczających.

Abdy Sayyed i in. [1] przeprowadzają optymalizację sieci dystrybucji wody poprzez zminimalizowanie kosztów sieci przy warunkach ograniczających wynikających z wymagań ciśnieniowych we wszystkich węzłach. Z uwagi na komplikującą zagadnienie mnogość warunków ograniczających, już w optymalnym projekcie niektóre warunki ograniczające są tam zastępowane poprzez dodatkową karę w funkcji celu. Kara jest stosowana za niespełnienie ograniczeń ciśnieniowych. W cytowanej pracy zostały zastosowane trzy metody wnioskowania karnego. Oznacza to zaznaczającą się niekiedy w literaturze tendencję do ucieczki od nadmiaru warunków ograniczających. Lecz wymaga to właściwego doboru funkcji kary.

Frizzone i in. [19], celem maksymalizacji dochodu netto dla kilku upraw podlegających ograniczeniom dostępności wody i obszaru uprawy, dokonują linearyzacji nieliniowej funkcji celu. Linearyzacja jest typowym narzędziem stosowanym w celu przeprowadzenia procesu optymalizacji [37].

1.4. Krytyczna ocena niektórych wyników prezentowanych w literaturze

Liczne prace [26, 29-30, 40, 48, 55-58] sygnalizują konieczność ostrożności przy wykorzystywaniu metod *LP*. Wynika to głównie z niejednoznaczności raportów wrażliwości zawierających wektory cen dualnych [55-58]. W tej pracy zauważa się, że niejednoznaczność

wektorów cen dualnych jest konsekwencją liniowej zależności wektorów wierszowych parametrów lewych stron wiążących warunków ograniczających modelu *LP*. Zależność ta musi mieć miejsce, gdy liczba m_0 wiążących warunków ograniczających przewyższa liczbę zmiennych decyzyjnych n . Lecz zależność ta jest zwykle niekontrolowana przez analityków. Koltai i Terlaky [29] wskazują, że pojawia się ona niemal zawsze i to już dla niewielkich liczb m warunków ograniczających. Gdyby problem niejednoznaczności wektora cen dualnych nie występował w modelu dualnym, to cykliczność procedur postoptimalizacyjnych szybko do niego doprowadzi. Zauważa się, że w cytowanej literaturze modele gospodarowania wodą zawierają wartości m oraz n bardzo często określane nawet w setkach lub tysiącach. A przecież już dla niewielkich ich wartości winno to rodzić u analityków wielką ostrożność w operowaniu cenami dualnymi. Zauważa się tu brak niezbędnego krytycyzmu u autorów wielu prac wykorzystujących ceny dualne do zagadnień ekonomicznych i technicznych. I tak, pojedynczy niejednoznaczny wektor cen dualnych w dystrybucji wody nie powinien stać się podstawą do podejmowania decyzji zarówno normującej rynkową cenę wody jak i wpływającej na procedury modernizujące sieć wodociągową. W tej pracy sygnalizuje się konieczność rozważania kilku alternatywnych technicznych scenariuszy decyzyjnych opartych o niektóre węzłowe rozwiązania w modelu dualnym do pierwotnego modelu *LP*. Stąd dalej formułuje się metodykę tworzenia tych alternatywnych technicznych scenariuszy decyzyjnych. Autorzy dostrzegają, że dotychczas dające się niekiedy zauważyć w literaturze powątpiewania o użyteczności cen dualnych jest prawdopodobnie powiązane z brakiem wiedzy o ich niejednoznaczności jak również z brakiem praktycznych metod wykorzystania tego faktu. Wyjątkiem mogą być tu prace [24, 55-58]. W rozdziale 2 na prostym przykładzie sieci wodociągowej z nieskończenie wieloma wektorami cen dualnych wskazuje się jak zaproponować zręby alternatywnych scenariuszy modernizacji już uprzednio zoptymalizowanej sieci.

1.5. Interpretacja cen dualnych. Problemy w analizie wrażliwości

Raporty analizy wrażliwości dla *LP* wskazują cechy determinujące wybór optymalnego wariantu decyzyjnego:

1. opisują niektóre proste skutki wywołane odstępianiem od planu optymalnego (tj. wysokość przyrostu krańcowego czyli wielkość, o którą należy skorygować optymalną wartość funkcji celu oraz zakres obowiązywania korekty w tej wysokości);
2. wskazują jak długo nie należy zmieniać wariantu optymalnej decyzji przy zmianie pojedynczych parametrów liniowej funkcji celu;
3. wskazują, poprzez ceny dualne, jak zmieni się optymalna wartość funkcji celu przy zmianie (niekoniecznie pojedynczych) parametrów prawych stron poszczególnych warunków ograniczających w pewnym zakresie;
4. wskazują, czy opłaca się firmie zwiększyć dostępności określonego zasobu o określoną liczbę jednostek (analiza „więcej za mniej” Arsham [4]).

Ogólnie, cena dualna mierzy zmianę wartości funkcji celu wynikającą ze zwiększenia dostępności określonego zasobu o jednostkę, zazwyczaj przy wyraźnie niedomówionym a domyślnym założeniu, że nie zmieni się ilości pozostałych „deficytowych” zasobów. Każdemu ograniczonemu zasobowi odpowiada wówczas osobna cena dualna. Każdorazowo bada się wtedy wpływ zmiany ilości każdego pojedynczego „deficytowego” czynnika (tj. tego dla którego ograniczenie jest wiążące). Ceny dualne pozostają stałe, dopóki nie zmieni się zbiór wiążących ograniczeń rozwiązania optymalnego. Każda z tych cen mierzy wartość korzyści z rozszerzenia zdolności produkcyjnych lub strat wynikających z ich zmniejszenia. Innymi słowy cena dualna odpowiadająca prawej stronie określonego warunku ograniczającego wskazuje, o ile zmieni się wartość funkcji celu przy rozluźnieniu tego ograniczenia. Jeżeli określony czynnik produkcji, czyli pewien zasób, nie jest w pełni wykorzystany w rozwiązaniu

optymalnym (tzn. nie jest „deficytowy”, nie stanowi ograniczenia wiążącego / non-binding constraint), to ma cenę dualną równą zero. Może być on dodatkowo częściowo spożytkowany po zwiększeniu innych zasobów lecz nie musi go zabraknąć. Jednak, jak w obecnej pracy wykazano, to każdy inny czynnik o cenie dualnej równej zero, gdy został już w całości zużyty (tzn. stał się „deficytowy”, bo stanowi ograniczenie wiążące), może stać się dodatkowo wymagany w podlegającej oszacowaniu proporcji do zwiększanej ilości pewnych zasobów o niezerowej cenie dualnej. Analiza zmian nie tylko pojedynczego parametru prawych stron warunków ograniczających jest przedmiotem licznych studiów. Szeroki przegląd literatury w tym zakresie prezentują Shahin i in. [48]. Dokonana tam klasyfikacja pozwala wyróżnić oprócz zwykłej analizy wrażliwości (ordinary sensitivity analysis) jeszcze 7 innych typów analizy postoptymalizacyjnej: 1) regułę 100% [6], 2) „symetryczną tolerancję” – [59-61], 3) „niesymetryczną tolerancję” będącą rozszerzeniem tolerancji symetrycznej, a wprowadzoną przez Arshama i Oblaka [5], Wondolowskiego [63] i Wendella [62], 4) (*PLP*) parametryczne programowanie liniowe [21, 47], 5) wieloparametryczne programowanie liniowe [54], 6) analizę wrażliwości przy funkcjonalnej zależności parametrów prawych stron warunków ograniczających lub współczynników funkcji celu [23], 7) analizę wrażliwości ze skorelowanymi ww. parametrami [48]. Praca Arshama [4] dobrze porównuje większość z ww. metod poprzez konstrukcje największego regionu wrażliwości dla ogólnego *LP*. Tym samym Arsham [4] wskazuje większość z tych typów jako szczególne przypadki swej analizy. Niemniej nadal pozostaje nierozstrzygnięta kwestia wielu szczególnych przypadków zwłaszcza zdegenerowanych o czym wyraźnie Arsham [4] tam sygnalizuje. Należy tu zauważyć, że zachowanie określonych (najlepiej optymalnych) proporcji przy zwiększaniu zasobów stanowi podstawę (optymalnego) *PLP*. W innym przypadku część zwiększonych zasobów może pozostać niewykorzystana, czyli nieproduktywna. Tym samym dostrzega się potrzebę sformułowania zasad optymalnego doboru najbardziej produktywnych wektorów do *PLP*, co jest przedmiotem obecnej pracy. Innym nierozstrzygniętym w literaturze problemem jest praktyczna użyteczność niejednoznacznych raportów analizy wrażliwości lub choćby wskazywanie faktu pojawiania się ich przez popularne pakiety obliczeniowe [26]. Fakt istnienia nieskończenie wielu rozwiązań modelu dualnego [55-56] dla przeciętnego analityka czyni raport wrażliwości najczęściej nieprzydatnym z uwagi na kłopoty z interpretacją uzyskanych niejednoznacznych raportów. Dotychczas ten ostatni problem został opisany tylko częściowo i to w jednostkowych przypadkach modeli transportowych [57-58]. Prezentowane tam modele transportowe stanowią szczególny przypadek analizy wrażliwości przy funkcyjnej zależności parametrów prawych stron warunków ograniczających [23].

Zatem autorzy tej pracy formułują zasady określenia proporcjonalności równoczesnych zmian parametrów prawych stron warunków ograniczających w przypadku niejednoznacznych raportów analizy wrażliwości. Jednocześnie identyfikują liniową zależność wektorów wierszowych parametrów lewych stron wiążących warunków ograniczających jako przyczynę niejednoznaczności cen dualnych. W tych warunkach wykorzystują różne możliwe do uzyskania powszechnie dostępnym oprogramowaniem raporty zwykłej analizy wrażliwości. Wskazują odmienną interpretację ceny dualnej odpowiadającej pierwszemu warunkowi ograniczającemu dla każdego z uzyskanych raportów analizy wrażliwości (tabele 2, 3, 6). Odmienną ta polega na tym, że jednostkowa zmiana prawej strony pierwszego warunku ograniczającego dla każdego raportu wymusza równoczesną odpowiednio proporcjonalną zmianę prawej strony innych warunków ograniczających. W rozpatrywanym przykładzie autorzy wskazują, że oszczędność zużycia wody o jedną jednostkę może wymagać równoczesnego spełnienia jednego z dwóch alternatywnych scenariuszy działań technicznych. Przy tym każdy z tych dwóch scenariuszy technicznych pozwala na zaoszczędzenie innej ilości wody i skutkuje innymi oszczędnościami finansowymi. Wybór pomiędzy tymi scenariuszami wymaga uwzględnienia dodatkowych informacji nieprecyzowanych w tym przykładzie. Celem

klarownej prezentacji nowej metodyki przydatnej w procesach eksploatacyjnych wielu złożonych systemów technicznych ograniczono się do przeprowadzenia studium uproszczonego modelu gospodarowania wodą.

2. Studium uproszczonego modelu gospodarowania wodą

Autorzy wskazali już powyżej, że każdy model *LP* dla sieci wodociągów z pojedynczym niejednoznacznym rozwiązaniem zadania dualnego samodzielnie nie powinien być podstawą do kształtowania rynkowych cen wody lub modyfikacji parametrów tej sieci bez skonstruowania kilku alternatywnych scenariuszy technicznego postępowania. Zaś pełna analiza już niewielkiego modelu *LP* prowadzi do wielu pobocznych wątków, które nie są istotne dla prezentacji metodyki tworzenia zrębów alternatywnych scenariuszy technicznego postępowania. Stąd w poniższym uproszczonym przykładzie nadano szczegółową interpretację jedynie dwóm warunkom ograniczającym przy częściowej interpretacji większości pozostałych warunków ograniczających modelu *LP*. Jest to celowy zabieg autorów by wskazać na szeroki zakres przydatności poniższej metodyki przy podkreśleniu znaczenia ograniczenia zużycia wody i kosztów jej pozyskania. Dokonując niewielkich zmian interpretacyjnych poniższy przykład równie dobrze może być odnoszony do osiedlowej sieci wodociągów, która podłączona jest do trzech węzłów poboru wody z większego systemu zaopatrzenia w wodę dużej aglomeracji miejsko-przemysłowej [por. 38]. Taki model zapotrzebowania w wodę uzupełniać można woj. o dynamikę zmian sezonowych i rytmu tygodniowego [por. 35]. Wówczas zmianie ulegają niektóre parametry modelu oraz zmianie ulega interpretacja poszczególnych warunków ograniczających. W każdym z tych przypadków problem szczegółowej interpretacji pojedynczych warunków ograniczających będzie musiał być rozstrzygnięty indywidualnie, lecz za każdym razem powrócą te same rozwiązywane tu trudności: 1) klarowne opisanie nieprzeliczalnego zbioru wszystkich niejednoznacznych cen dualnych, 2) nadanie praktycznej interpretacji tej niejednoznaczności woj. poprzez sformułowanie alternatywnych scenariuszy postoptymalizacji dla sieci wodociągowej. Aby pokonywać te trudności analityk systemów logistyki miejskiej winien zapoznać się z przedstawionym tu formalizmem matematycznym opisującym metodykę przejścia od typowych dla *LP* raportów wyników i niejednoznacznych raportów wrażliwości do postulowanych scenariuszy. By było to klarowne niezbędnym jest naszkicowanie modelu dla niewielkiego i niezbyt skomplikowanego przykładu dystrybucji wody, który zbędnie nie eksponuje problemów technicznych lecz skupia się na poprawieniu metodyki inżynierskiego wnioskowania.

Stąd celem uzyskania prostoty i ustalenia uwagi na metodyce poszerzającej postoptymalizację założmy, że analizowana aglomeracja miejsko-przemysłowa zasilana jest w wodę przez trzy ujęcia wody znajdujące się na tym samym cieku w miejscach poboru P_i dla $i = 1, 2, 3$ (jak na rys. 1).



Rys.1 Trzy ujęcia wody dla aglomeracji miejsko-przemysłowej znajdujące się na tym samym cieku, przekrój wodowskazowy

Dobowy rozbiór wody w aglomeracji jest wielkością zmienną. Zatem ilość wody pobierana z ujęcia nr i to zmienna decyzyjna $x_i \geq 0$, dla $i = 1, 2, 3$, a okresowo może być ona

wyznaczana w różnych jednostkach woj. [$\text{dm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$], [$\text{dm}^3 \cdot \text{h}^{-1}$], [$\text{m}^3 \cdot \text{d}^{-1}$], [$\text{m}^3 \cdot \text{miesiąc}^{-1}$], [$\text{m}^3 \cdot \text{rok}^{-1}$]. Nadto założmy, że aktualne okresowe zapotrzebowanie aglomeracji na wodę jest zmienne i zawiera się w przedziale $\langle 200; 300 \rangle$ jednostek, co można zinterpretować jako ograniczenia w postaci:

$$WO_1: x_1 + x_2 + x_3 \geq 200$$

$$WO_2: x_1 + x_2 + x_3 \leq 300$$

Z uwagi na zasadę nienaruszalności przepływu wody w rzece w przekroju wodowskazowym „S” lub względu techniczne zależności między poborami wyrażają się w postaci ograniczeń:

$$WO_3: 9 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 \leq 1800$$

$$WO_4: 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \geq 1000$$

$$WO_5: 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \geq 600$$

$$WO_6: 0 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \geq 200$$

Przy tym przepływ nienaruszalny (*ang. Instream flow, minimum acceptable flow*) określany jest jako ilość wody, która powinna być pozostawiona w danym przekroju cieku ze względów: biologicznych, ekologicznych, społecznych. Konieczność zachowania tego przepływu nie powinna podlegać ocenom ekonomicznym. W związku z tym brane pod uwagę w bilansie wodnym zasoby powinny być pomniejszone o przepływy nienaruszalne. Przy tym kryterium hydrobiologiczne określa minimalny przepływ dla zachowania życia flory i fauny w środowisku wodnym. Kryterium ochrony środowiska określa minimalny przepływ zapewniający zachowanie równowagi stanów wód powierzchniowych i podziemnych w obrębie parków narodowych, rezerwatów przyrody i stref chronionego krajobrazu. Kryterium rybacko-wędkarskie określa minimalny przepływ umożliwiający rozwój ryb. Kryterium sportu i turystyki wodnej określa minimalne stany wód i odpowiadające im przepływy umożliwiające turystykę wodną [9-10, 43]. W poruszanych zagadnieniach hydrologicznych ważną rolę odgrywa także kryterium techniczne odnoszące się do technologicznych możliwości systemu poboru wody przez stosowane specjalistyczne urządzenia. Również niektóre takie ograniczenia można odnieść do niezawodnego funkcjonowania kluczowych dziedzin gospodarki jak energetyka czy transport wodny.

Łączny koszt poboru wody z tych trzech ujęć opisuje minimalizowana funkcja celu $FC: c \cdot x \rightarrow \min$. Przy tym wektor współczynników kosztów ma postać

$$c = [c_1 \ c_2 \ c_3] = [3 \ 4 \ 3], \quad \text{zaś} \quad x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$$

stanowi wektor zmiennych decyzyjnych. Celem optymalizacji zmiennych decyzyjnych wykorzystano dodatek *Solver* w programie *Excel* (por. tabele 1 i 2). Przy warunkach ograniczających woj. dla $j = 1, \dots, 6$ wektor optymalnych zmiennych decyzyjnych

$$x^* = [x_1^* \ x_2^* \ x_3^*]^T = [66. (6) \ 66. (6) \ 66. (6)]^T$$

świadczy, że trzy identyczne wielkości poboru wody z trzech ujęć wyznaczają minimalną wartość funkcji celu na poziomie 666.67 jednostek pieniężnych. Uzyskane rozwiązanie pozostanie niezmienione, gdy jednostkowy koszt poboru wody z ujęcia P_1 pozostanie w zakresie od 2 do 3.5 jednostek pieniężnych, a przy tym koszt pozyskania wody z pozostałych źródeł nie ulegnie zmianie. Zatem przykładowo przy wzroście jednostkowego kosztu poboru wody z tego ujęcia o 0.3 jednostki pieniężne rozwiązanie optymalne x^* nie ulegnie zmianie, lecz koszt łączny wrośnie o 20 jednostek pieniężnych. Podobnie z górnej części tabeli 2 można odczytać dopuszczalne zmiany pozostałych pojedynczych parametrów funkcji kosztów całkowitych, aby rozwiązanie optymalne x^* nie uległo zmianie oraz obliczyć odpowiadającą temu zmianę łącznego kosztu pozyskania wody.

Założmy, że krytyczny stan systemu wymusza zmniejszenie poboru wody tj. naruszenie prawej strony WO_1 . *Które inne parametry modelu i jak należy zmodyfikować, aby zmniejszenie poboru wody było wykonalne oraz powiązane z optymalnym spadkiem kosztów?*

Tabela 1. Optymalny pobór wody dla aglomeracji miejsko-przemysłowej z trzech ujęć wody – MP. Raport wyników w programie Excel

Objective Cell (Min)					
Cell	Name	Original Value	Final Value		
\$E\$10	Total Cost		10 666.6666667		
Variable Cells					
Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer	
\$A\$2	x1		1 66.66666667	Contin	
\$B\$2	x2		1 66.66666667	Contin	
\$C\$2	x3		1 66.66666667	Contin	
Constraints					
Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$E\$4	Left Side Constraint 1	200	\$E\$4>=\$G\$4	Binding	0
\$E\$5	Left Side Constraint 2	200	\$E\$5<=\$G\$5	Not Binding	100
\$E\$6	Left Side Constraint 3	1800	\$E\$6<=\$G\$6	Binding	0
\$E\$7	Left Side Constraint 4	1000	\$E\$7>=\$G\$7	Binding	0
\$E\$8	Left Side Constraint 5	600	\$E\$8>=\$G\$8	Binding	0
\$E\$9	Left Side Constraint 6	200	\$E\$9>=\$G\$9	Binding	0

Tabela 2. Raport wrażliwości optymalizacji w modelu pierwotnym dla przykładu w programie Excel.

Variable cells						
Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Coefficient Objective	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$A\$2	x1	66.66666667	0	3	0.5	1
\$B\$2	x2	66.66666667	0	4	0.285714286	1
\$C\$2	x3	66.66666667	0	3	1E+30	0.25
Constraints						
Cell	Name	Final Value	Price dual	Constraint R. H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$E\$4	Left Side Constraint 1	200	0	200	0	1E+30
\$E\$5	Left Side Constraint 2	200	0	300	1E+30	100
\$E\$6	Left Side Constraint 3	1800	-0.66666667	1800	0	1.42109E-14
\$E\$7	Left Side Constraint 4	1000	1.66666667	1000	7.10543E-15	0
\$E\$8	Left Side Constraint 5	600	0.33333333	600	100	2.84217E-14
\$E\$9	Left Side Constraint 6	200	0	200	2.84217E-14	1E+30

Z uwagi na 6 warunków ograniczających przy 3 zmiennych decyzyjnych wnioskujemy, że wektory wierszowe parametrów lewych stron warunków ograniczających są liniowo zależne. Ponadto z uwagi na 5 wiążących warunków ograniczających i 1 niewiążący ujawnionych w tabeli 1, przy 3 zmiennych decyzyjnych wnioskujemy, że rozwiązanie zadania pierwotnego jest jednoznaczne, lecz rozwiązania dualne tworzą pewien podzbiór przestrzeni 2 wymiarowej. Stąd celem przeprowadzenia prawidłowej postoptymalizacji należy dokładnie zbadać *model dualny (MD)* do zaprezentowanego tu *modelu pierwotnego (MP)* [24, 52]. Dzieje się tak z uwagi na niejednoznaczność wyników optymalizacji modelu dualnego i wynikającą z tego problematyczność we wnioskowaniu. Oznacza to, że nieskończenie wiele wyników optymalizacji modelu dualnego sprawia kłopot w interpretacji zagadnień biznesowych i technicznych [55-56]. Uzyskanie wielu węzłowych rozwiązań modelu dualnego na podstawie *MP* jest pewnym problemem. Jednym ze sposobów uzyskania kolejnych rozwiązań węzłowych jest zmiana kolejności wprowadzania warunków ograniczających [24]. Lecz wymaga to przebadania znacznej liczby permutacji spośród aż $6! = 720$. Pomocną okazuje się optymalizacja w modelu dualnym do *MP*. Model *MD* przyjmuje postać [12, 62]:

$$FC_{MD}: 200 \cdot y_1 + 300 \cdot y_2 + 1800 \cdot y_3 + 1000 \cdot y_4 + 600 \cdot y_5 + 200 \cdot y_6 \rightarrow \max$$

$$WO_{MD1}: 1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 9 \cdot y_3 + 5 \cdot y_4 + 2 \cdot y_5 + 0 \cdot y_6 \leq 3$$

$$WO_{MD2}: 1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 11 \cdot y_3 + 6 \cdot y_4 + 4 \cdot y_5 + 2 \cdot y_6 \leq 4$$

$$WO_{MD3}: 1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 7 \cdot y_3 + 4 \cdot y_4 + 3 \cdot y_5 + 1 \cdot y_6 \leq 3$$

$$WB_{MD}: y_j \leq 0 \text{ dla } j = 2, 3, y_j \geq 0 \text{ dla } j = 1, 4, 5, 6.$$

Z uwagi na to, że WO_2 oraz WO_3 są nierównościami niestandardowymi w *MP*, zatem odpowiadające im dualne zmienne decyzyjne w *MD* są niedodatnie [49, p. 104]. Ponieważ zaś WO_2 jest niewiążącym warunkiem ograniczającym, to odpowiadająca mu wartość dualnej zmiennej decyzyjnej y_2 jest równa zero. Rzeczywiście w raporcie wrażliwości dla *MP* uzyskanego w programie Excel (tabela 2) kolumna *cena dualna* zawiera jedno z rozwiązań optymalnych w *MD* i ma ono postać:

$$y_A^* = [y_{A_1}^*, y_{A_2}^*, y_{A_3}^*, y_{A_4}^*, y_{A_5}^*, y_{A_6}^*]^T = [0 \quad 0 \quad -0.(6) \quad 1.(6) \quad 0.(3) \quad 0]^T = 1/3 \cdot \tilde{y}_A^*.$$

Zaś w raporcie wrażliwości dla *MD* uzyskanego w programie Excel (tabela 3) kolumna *wartość końcowa* zawiera inne rozwiązanie optymalne w *MD* i ma ono postać

$$y_B^* = [y_{B_1}^*, y_{B_2}^*, y_{B_3}^*, y_{B_4}^*, y_{B_5}^*, y_{B_6}^*]^T = [0.(6) \quad 0 \quad 0 \quad 0.(3) \quad 0.(3) \quad 0]^T = 1/3 \cdot \tilde{y}_B^*.$$

Granice dopuszczalnego wzrostu i spadku wartości b prawej strony warunków ograniczających *MP* można odczytać odpowiednio z dolnej części tabeli 2 lub z górnej części tabeli 3.

Tabela 3. Raport wrażliwości w modelu dualnym uzyskany w programie Excel.

Variable cells						
Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Coefficient Objective	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$A\$1	y1	0.66666667	0	200	0	
\$B\$1	y2	0	100	300	1E+30	
\$C\$1	y3	0	0	1800	1E+30	
\$D\$1	y4	0.33333333	0	1000	0	
\$E\$1	y5	0.33333333	0	600	100	
\$F\$1	y6	0	0	200	0	1E+30

Constraints						
Cell	Name	Final Value	Price dual	Constraint R. H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$H\$3	Left Side Constraint 1	3	66.66666667	3	0.5	
\$H\$4	Left Side Constraint 2	4	66.66666667	4	0.285714286	
\$H\$5	Left Side Constraint 3	3	66.66666667	3	0.5	

Tabela 4. Wektor \mathbf{y}_c^* cen dualnych i odpowiadające mu granice dopuszczalnego wzrostu i spadku wartości \mathbf{b} prawej strony warunków ograniczających w MP ; na podstawie ostatniej macierzy metody simplex uzyskanej wg. [65]

Objective Cell (Min)			
Cell	Name	Original Value	Final Value
\$E\$10	Total Cost	666.6666667	650

Variable Cells				
Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
\$A\$2	x1	66.66666666	50	Contin
\$B\$2	x2	66.66666666	125	Contin
\$C\$2	x3	66.66666666	3.55271E-14	Contin

Constraints					
Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$E\$4	Left Side Constraint 1	175	\$E\$4>=\$G\$4	Binding	0
\$E\$5	Left Side Constraint 2	175	\$E\$5<=\$G\$5	Not Binding	125
\$E\$6	Left Side Constraint 3	1825	\$E\$6<=\$G\$6	Binding	0
\$E\$7	Left Side Constraint 4	1000	\$E\$7>=\$G\$7	Binding	0
\$E\$8	Left Side Constraint 5	600	\$E\$8>=\$G\$8	Binding	0
\$E\$9	Left Side Constraint 6	250	\$E\$9>=\$G\$9	Binding	0

Nieco odmienny wektor cen dualnych (por tabela 4):

$$\mathbf{y}_c^* = [y_{c_1}^*, y_{c_2}^*, y_{c_3}^*, y_{c_4}^*, y_{c_5}^*, y_{c_6}^*]^T = [0 \ 0 \ -1 \cdot (3) \ 3 \ 0 \ 0 \cdot (3)]^T = 1/3 \cdot \tilde{\mathbf{y}}_c^*$$

uzyskano za pomocą aplikacji dostępnej na stronie internetowej [65] dla modelu MP . Dodatkowo wówczas z uzyskanej tam ostatniej macierzy metody simplex odczytano macierz odwrotną \mathbf{B}^{-1} do tzw. Bazy (uzupełnionej dodatkowymi zmiennymi, zgodnie z regułą metody simplex) oraz wyznaczono zawarte w tabeli 4 granice dopuszczalnego wzrostu i spadku wartości \mathbf{b} prawej strony warunków ograniczających MP poprzez rozwiązanie odpowiedniej nierówności:

$$[x_3^* \ x_5^* \ x_1^* \ x_8^* \ x_4^* \ x_2^*]^T = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) \geq 0$$

ze względu na wektor $\Delta\mathbf{b}$ zmian prawych stron warunków ograniczających [49, p. 79].

Dla wszystkich $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0; 1 \rangle$ takich, że $\alpha + \beta + \gamma = 1$ dowolna wypukła kombinacja liniowa $\alpha \cdot \mathbf{y}_A^* + \beta \cdot \mathbf{y}_B^* + \gamma \cdot \mathbf{y}_C^*$ trzech wektorów $\mathbf{y}_A^*, \mathbf{y}_B^*, \mathbf{y}_C^*$ również stanowi wektor rozwiązań dualnych. Nadto dla wektora kolumnowego \mathbf{b} prawych stron warunków ograniczających MP zgodnie z twierdzeniem Gale'a – Kuhna – Tuckera [20] mamy:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^* &= \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{y}_A^* = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{y}_B^* = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{y}_C^* = \\ &= \mathbf{b}^T \cdot [\alpha \cdot \mathbf{y}_A^* + \beta \cdot \mathbf{y}_B^* + \gamma \cdot \mathbf{y}_C^*] = \\ &= 1/3 \cdot \mathbf{b}^T \cdot [\alpha \cdot \tilde{\mathbf{y}}_A^* + \beta \cdot \tilde{\mathbf{y}}_B^* + \gamma \cdot \tilde{\mathbf{y}}_C^*] = \\ &= 1/3 \cdot \mathbf{b}^T \cdot [\tilde{\mathbf{y}}_B^* + \gamma \cdot (\tilde{\mathbf{y}}_C^* - \tilde{\mathbf{y}}_A^*) - (\alpha + \gamma) \cdot (\tilde{\mathbf{y}}_B^* - \tilde{\mathbf{y}}_A^*)] = \\ &= 1/3 \cdot \mathbf{b}^T \cdot [\tilde{\mathbf{y}}_B^* + \gamma \cdot \mathbf{w} + \lambda \cdot \mathbf{v}] = \mathbf{b}^T \cdot [\mathbf{y}^*(\gamma, \lambda)] = 666. (6) . \end{aligned}$$

Przy czym $\lambda = \beta - 1 = -(\alpha + \gamma)$, $\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{y}}_C^* - \tilde{\mathbf{y}}_A^*$, $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{y}}_B^* - \tilde{\mathbf{y}}_A^*$, nadto $\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{w} = 0$ oraz $\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{v} = 0$ dla $\mathbf{w}^T = [0 \ 0 \ -2 \ 4 \ -1 \ 1]$ oraz $\mathbf{v}^T = 2 \cdot [1 \ 0 \ 1 \ -2 \ 0 \ 0]$ oznaczają ortogonalność wektorów \mathbf{w} i \mathbf{v} do wektora \mathbf{b} prawej strony warunków ograniczających w MP będącego równocześnie wektorem współczynników funkcji celu modelu dualnego. Zauważmy, że obydwa wektory \mathbf{w} i \mathbf{v} ortogonalne do wektora \mathbf{b} można wskazać jako te wiersze macierzy \mathbf{B}^{-1} odwrotnej do macierzy bazy \mathbf{B} , które są ortogonalne do wektora \mathbf{b} i poprzez to w iloczynie

$\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{b} = [x_3^* \ x_5^* \ x_1^* \ x_8^* \ x_4^* \ x_2^*]^T = [66. (6) \ 100 \ 66. (6) \ 0 \ 0 \ 66. (6)]^T$ tworzą zerowe wartości zmiennych dualnych pozostających w bazie w ostatniej macierzy metody simplex. Oznacza to, że dotychczasowy wysiłek na uzyskanie jednego z wektorów dualnych \mathbf{y}_B^* oraz wektorów $1/3 \cdot \mathbf{w}$ i $1/3 \cdot \mathbf{v}$ można uprościć wykorzystując jedynie ostatnią macierz metody simplex [58].

Zatem rozwiązaniu optymalnemu $[66. (6) \ 100 \ 66. (6) \ 0 \ 0 \ 66. (6)]^T$ w MP metodą simplex odpowiada nieskończenie wiele rozwiązań optymalnych $\mathbf{y}^*(\gamma, \lambda)$ w MD , które w przestrzeni \mathbf{R}^6 tworzą 2 wymiarowy wypukły fragment tej przestrzeni o postaci parametrycznej

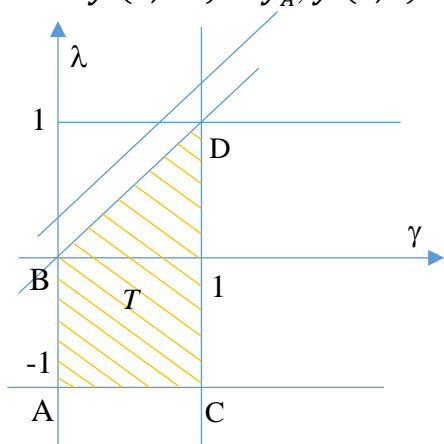
$$\mathbf{y}^*(\gamma, \lambda) = 1/3 \cdot (\tilde{\mathbf{y}}_B^* + \gamma \cdot \mathbf{w} + \lambda \cdot \mathbf{v}) ,$$

gdzie dla każdej pary parametrów (γ, λ) wektor $\mathbf{y}^*(\gamma, \lambda)$ spełnia WB_{MD} . Stąd rozwiązując układ 6 nierówności

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \leq 0 \\ \geq 0 \\ \geq 0 \\ \geq 0 \end{matrix}$$

wyznaczamy zakres dla parametrów (γ, λ) w postaci figury wypukłej T . I tak $T = \{(\gamma, \lambda) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq \gamma \leq 1, -1 \leq \lambda \leq \gamma\}$. Zakres T ma kształt trapezu (rys. 2) o wierzchołkach ABCD, gdzie punkt B pokrywa się z początkiem układu współrzędnych $O\gamma\lambda$. Trapez T zawiera uprzednio wyznaczony zakres parametrów $T_0 = \{(\gamma, \lambda) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq \gamma \leq 1, -1 \leq \lambda \leq -\gamma\}$ w postaci trójkąta o wierzchołkach ABC, odpowiadający wypukłej kombinacji liniowej tylko trzech wektorów

$$\mathbf{y}^*(0; -1) = \mathbf{y}_A^*, \mathbf{y}^*(0; 0) = \mathbf{y}_B^*, \mathbf{y}^*(1; -1) = \mathbf{y}_C^* .$$



Rys. 2 Obszar trapezu T o wierzchołkach ABCD wyznacza zakres parametrów (γ, λ) , dla których dualny wektor $\mathbf{y}^*(\gamma, \lambda)$ jest dopuszczalny w MD

Stąd uzyskujemy dodatkowy węzłowy wektor cen dualnych

$$\mathbf{y}^*(1; 1) = \mathbf{y}_D^* = [y_{D_1}^*, y_{D_2}^*, y_{D_3}^*, y_{D_4}^*, y_{D_5}^*, y_{D_6}^*]^T = [1. (3) \quad 0 \quad 0 \quad 0. (3) \quad 0 \quad 0. (3)]^T = 1/3 \cdot \tilde{\mathbf{y}}_D^*$$

o nieznanym zakresie zmian parametrów prawej strony WO odpowiadających tym cenom.

Dla każdego $(\gamma, \lambda) \in T$ w MD wartość funkcji $FC_{MD}(\gamma, \lambda)$ jest stała i wynosi 666.67 zaś wektor $\mathbf{y}^*(\gamma, \lambda)$ jest wektorem dopuszczalnym tj. równocześnie spełnione są wszystkie warunki WB_{MD} , a warunki ograniczające modelu dualnego są wówczas warunkami wiążącymi w MD . Nadto dla $j = 1, \dots, 6$ mamy

$$y_j^*(\gamma, \lambda) \in \langle \min(y_{A_j}^*, y_{B_j}^*, y_{C_j}^*, y_{D_j}^*), \max(y_{A_j}^*, y_{B_j}^*, y_{C_j}^*, y_{D_j}^*) \rangle .$$

A stąd oraz z tabel 2 – 4 ponieważ $y_2^*(\gamma, \lambda) \equiv 0$, zatem dokonanie zmiany górnej granicy zapotrzebowania na wodę poprzez zmniejszenie prawej strony w WO_2 o 100 jednostek ani dowolne zwiększenie jej nie wpłynie na zmianę optymalnego planu poboru wody \mathbf{x}^* i na łączny koszt.

Analizując tabele 2 – 4 wnioskujemy, że istnieją dwa alternatywne sposoby na zmniejszenie łącznych kosztów: a) poprzez wykorzystanie wartości zmiennej dualnej $y_{B_1}^* = 0. (6)$ przy tylko pozornie niedozwolonym spadku b_1 lub b) korzystając z dwa razy większej wartości $y_{D_1}^* = 1. (3)$ przy nieznanym tu zakresie dozwolonego spadku b_1 .

Chociaż $y_1^*(\gamma, \lambda) \in (0; 1. (3))$, to być może największy spadek łącznych kosztów w wysokości $0. (6) \cdot 25 \approx 16.67$ jednostek pieniężnych w drodze zmniejszenia dolnej granicy zapotrzebowania na wodę można uzyskać poprzez (jednak) dopuszczalne zmniejszenie wartości 200 prawej strony pierwszego warunkującego WO_1 aż o hipotetyczne 25 jednostek, gdy wykorzystamy wartość dualną $y_{B_1}^* = y_1^*(0, 0) = 0. (6)$ odczytaną z górnej

części tabeli 3 dla MD , gdy $[\alpha \ \beta \ \gamma] = [0 \ 1 \ 0]$ tj., gdy $[\gamma \ \lambda] = [0 \ 0]$. Lecz taka pojedyncza zmiana WO_1 może jednak nie wnieść nic z uwagi na pozostałe 4 wiążące warunki ograniczające. Informują o tym dwie tabele 2 i 4. Oznacza to, że pojedyncza zmiana prawej strony WO_1 , jak w typowej analizie wrażliwości, nietypowo dodatkowo wymaga również zmiany prawych stron innych warunków ograniczających. Jak się dalej okazuje, taka słuszna sugestia wynika z faktu nienaturalnego zablokowania w tabeli 3 zarówno wzrostów jak i spadków parametrów prawej strony WO_1 odpowiadających niezerowej cenie dualnej. Podobne zastrzeżenia dotyczą nienaturalnego całkowitego zablokowania zmian parametrów prawej strony WO dla kilku niezerowych cen dualnych w tabelach 2 i 4.

Wyznaczenie wielkości zmiany łącznych kosztów poboru wody $\Delta FC_{MD}(\Delta \mathbf{b})$, w zależności od znanego dowolnego wektora $\Delta \mathbf{b} = [\Delta b_1 \ \Delta b_2 \ \Delta b_3 \ \Delta b_4 \ \Delta b_5 \ \Delta b_6]^T$ zmian prawych stron warunków ograniczających w MP , najprościej wymaga powtórnego uruchomienia odpowiedniego oprogramowania. Lecz tu analityk stoi przed odwrotnym problemem, gdyż poszukuje najkorzystniejszego (najbardziej produktywnego) dla $y_{B_1}^*$ całego wektora zmian $\Delta \mathbf{b}$. Ponadto tu WO_1 nie jest jedynym wiążącym warunkiem ograniczającym lecz dla 3 zmiennych decyzyjnych jest aż 5 wiążących warunków ograniczających. Zatem dysponując tabelami 2 – 4 powstaje postoptimalizacyjne pytanie o charakterze nie tylko matematycznym lecz również menadżerskim: *Które zmiany Δb_j prawych stron warunków ograniczających, uwzględniające różne problemy techniczno-ekonomiczne poboru wody oraz zasadę nienaruszalności przepływu wody w rzece, muszą współtowarzyszyć:*

a) $y_{B_1}^* = 0$. (6) i spadkowi zapotrzebowania o $\Delta b_1 = 25$ jednostek wody tj. zaoszczędzeniu $0 \cdot (6) \cdot 25 \approx 16.67$ jednostek pieniężnych, a które

b) 2 razy większemu $y_{D_1}^* = 1$. (3) o nieznanym tu spadku zapotrzebowania Δb_1 ?

Aby odpowiedzieć na powyższe pytania zauważmy, że $FC = FC_{MD} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \cdot [\mathbf{y}^*(\gamma, \lambda)]$, tj. koszty są stałe dla dowolnych dozwolonych wartości parametrów γ oraz λ . Lecz jedynie dla właściwie obranego dozwolonego ustalonego wektora zmian $\Delta \mathbf{b}$ również nowe koszty tj. wartość $(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b})^T \cdot \mathbf{y}^*(\gamma, \lambda)$ jest stała dla dowolnych dozwolonych wyżej dobranych wartości parametrów γ oraz λ . Stąd należy tak dobierać wektor $\Delta \mathbf{b}$, by zmiana kosztów tj. wartość $\Delta FC_{MD}(\Delta \mathbf{b}; \gamma, \lambda) = (\Delta \mathbf{b})^T \cdot \mathbf{y}^*(\gamma, \lambda)$ nie zależała od doboru parametrów γ oraz λ . Ostatnia równość wskazuje jak dla wykorzystywanego tu całego wektora $\mathbf{y}^*(\gamma, \lambda)$ należy dobierać cały wektor $\Delta \mathbf{b}$. W szczególności, ponieważ również dla tak dobranych dowolnych parametrów $(\gamma, \lambda) \in T$ mamy $\Delta FC_{MD}(\Delta \mathbf{b}; \gamma, \lambda) = 1/3 (\Delta \mathbf{b})^T \cdot [\tilde{\mathbf{y}}_B^* + \gamma \cdot \mathbf{w} + \lambda \cdot \mathbf{v}] = 1/3 [(\Delta \mathbf{b})^T \cdot \tilde{\mathbf{y}}_B^*] = \Delta FC_{MD}(\Delta \mathbf{b}; 0, 0)$, gdy spełnione są dwa warunki: $(\Delta \mathbf{b})^T \cdot \mathbf{w} = 0$ oraz $(\Delta \mathbf{b})^T \cdot \mathbf{v} = 0$. Stąd ostatnie warunki ortogonalności opisują ten dozwolony właściwy sposób doboru składowych wektora zmian $\Delta \mathbf{b}$, odpowiadający operowaniu tu całym wektorem \mathbf{y}_B^* .

Ad a) *Co jednak, gdy podobnie jak w klasycznej analizie wrażliwości wykorzystać należy jedynie odczytaną z tabeli 3 pojedynczą składową $y_{B_1}^* = y_1^*(0; 0) = 0$. (6) wektora \mathbf{y}_B^* , tzn. gdy: $\Delta FC_{MD}(\Delta \mathbf{b}; \gamma, \lambda) = \Delta b_1 \cdot y_{B_1}^*$?*

Ponieważ ostatnia równość jest równoważna warunkowi

$$\sum_{j=1}^6 (\Delta b_j \cdot y_{B_j}^*) = \Delta b_1 \cdot y_{B_1}^*,$$

tzn. powstaje wymaganie aby oprócz $y_{B_1}^*$ pozostałe niezerowe elementy składowe $y_{B_j}^*$ wektora \mathbf{y}_B^* nie wpłynęły na wyznaczaną wartość zmiany dualnej funkcji celu. W tym celu po pierwsze przyjmujemy $\Delta b_4 = \Delta b_5 = 0$. Po drugie dla tak dobranych dowolnych parametrów γ oraz λ musi zachodzić równanie

$$\Delta FC_{MD}(\Delta \mathbf{b}; \gamma, \lambda) = \frac{1}{3} \cdot (\Delta \mathbf{b})^T \cdot [\tilde{\mathbf{y}}_B^* + \gamma \cdot \mathbf{w} + \lambda \cdot \mathbf{v}] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \Delta b_3 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta b_6 \end{bmatrix}^T \cdot \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \Delta FC_{MD}(\Delta \mathbf{b}; 0,0) = \frac{2}{3} \cdot \Delta b_1 \cdot$$

Stąd warunki: $(\Delta \mathbf{b})^T \cdot \mathbf{w} = 0$ oraz $(\Delta \mathbf{b})^T \cdot \mathbf{v} = 0$ przyjmują postać $-2\Delta b_3 + \Delta b_6 = 0$ oraz $2\Delta b_1 + 2\Delta b_3 = 0$. Zatem jeżeli $-25 \leq \Delta b_1 \leq 28$ oraz $-100 \leq \Delta b_2$ to koszt poboru wody ulegnie zmianie o $\frac{2}{3} \cdot \Delta b_1$ gdy

$$\Delta \mathbf{b} = \Delta b_1 \cdot [1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ -2]^T + \Delta b_2 \cdot [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

Oznacza to, że spadek łącznych kosztów o wysokość $0. (6) \cdot 25 \approx 16.67$ jednostek pieniężnych w drodze dopuszczalnego zmniejszenia minimalnego zapotrzebowania na wodę z 200 do 175 jednostek można uzyskać poprzez równoczesny (dopuszczalny) wzrost prawej strony trzeciego (technicznego) warunku ograniczającego WO_3 o 25 jednostek oraz wzrost prawej strony szóstego (również technicznego) warunku ograniczającego WO_6 o 50 jednostek, przy dopuszczalnym spadku prawej strony drugiego warunku ograniczającego WO_2 o 100 jednostek. Słuszność przytoczonego analitycznego wniosku potwierdzają tabele 5 i 6 dla MP po zmianie 4 spośród 6 parametrów prawych stron warunków ograniczających. Słuszność ta istnieje pomimo wątpliwości, które mogły wzbudzać w tabeli 3 zerowe wartości dopuszczalnego wzrostu dla WO_3 i dla WO_6 . Lecz wskazane w tabeli 3 zakresy zmian Δb_j prawych stron dla WO_3 i dla WO_6 dotyczą zmiany tego pojedynczego parametru w połączeniu z odpowiednio zidentyfikowanym zespołem kilku parametrów opisanych wektorem $\Delta \mathbf{b}$. Słuszność dokonanych równoczesnych zmian powyżej zidentyfikowanego zespołu parametrów w $\Delta \mathbf{b}$ potwierdzono przeprowadzając analizę prowadzącą do tabeli 5 jak i teoretyczne rozważania w rozdz. 3.1.

Tabela 5. Optymalny pobór wody dla aglomeracji miejsko-przemysłowej z trzech ujęć wody. MP po zmianie 4 parametrów prawych stron warunków ograniczających. Raport wyników w programie Excel

Objective Cell (Min)				
Cell	Name	Original Value	Final Value	
SE\$10	Total Cost	666.6666667	650	

Variable Cells				
Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
\$A\$2	x1	66.66666666	50	Contin
\$B\$2	x2	66.66666666	125	Contin
\$C\$2	x3	66.66666666	3.55271E-14	Contin

Constraints					
Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
SE\$4	Left Side Constraint 1	175	SE\$4>=GS\$4	Binding	0
SE\$5	Left Side Constraint 2	175	SE\$5<=GS\$5	Not Binding	125
SE\$6	Left Side Constraint 3	1825	SE\$6<=GS\$6	Binding	0
SE\$7	Left Side Constraint 4	1000	SE\$7>=GS\$7	Binding	0
SE\$8	Left Side Constraint 5	600	SE\$8>=GS\$8	Binding	0
SE\$9	Left Side Constraint 6	250	SE\$9>=GS\$9	Binding	0

Tabela 6. Raport wrażliwości w programie Excel dla MP po zmianie 4 parametrów prawych stron warunków ograniczających

Variable cells						
Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Coefficient Objective	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$A\$2	x1	50	0	3	0.5	1
\$B\$2	x2	125	0	4	0.8	1
\$C\$2	x3	3.55271E-14	0	3	0.5	0.4

Constraints						
Cell	Name	Final Value	Price dual	Constraint R. H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
SE\$4	Left Side Constraint 1	175	1.333333333	200	75	7.10543E-15
SE\$5	Left Side Constraint 2	175	0	300	1E+30	125
SE\$6	Left Side Constraint 3	1825	0	1800	1E+30	2.66454E-14
SE\$7	Left Side Constraint 4	1000	0.333333333	1000	1.33227E-14	150
SE\$8	Left Side Constraint 5	600	0	600	1.42109E-14	1E+30
SE\$9	Left Side Constraint 6	250	0.333333333	200	75	1.42109E-14

Zauważmy, że samo zmniejszenie minimów dostawy wody z trzech źródeł wyrażone zmniejszeniem wyrazu wolnego w WO_1 nie spowoduje spadku łącznych kosztów poboru wody. Dopiero zespołowe działanie polegające na jednoczesnym wykonaniu trzech wspomnianych wyżej czynności przynosi zamierzony efekt zmniejszenia łącznych kosztów zużycia wody przez całą aglomerację z tego systemu. Najbardziej efektywnym posunięciem jest utrzymanie w technicznych warunkach ograniczających proporcji $\Delta b_3/\Delta b_1 = -1$, $\Delta b_6/\Delta b_1 = -2$ pozwalających na maksymalne ograniczenie zużycia wody $\Delta b_1 = 25$. Przeprowadzona modyfikacja systemu poboru wody prowadzi do wyłączenia punktu poboru P_3 w czasie minimalnego zapotrzebowania na wodę i wymaga równocześnie unowocześnienia punktu poboru P_2 , by zwiększyć jego zdolność zaopatrywania aglomeracji w wodę.

Ad b) Jak analogiczna skorygowana procedura analizy wrażliwości wygląda, gdy wykorzystając należy wyrażoną kwotowo jedynie najwyższą pierwszą składową $y_{D_1}^* = y_1^*(1; 1) = 1$. (3) wektora \mathbf{y}_D^* , tzn. gdy: $\Delta FC_{MD}(\Delta \mathbf{b}; \gamma, \lambda) = \Delta b_1 \cdot y_{D_1}^*$?

Wówczas dwuwymiarowy zbiór wektorów dualnych należy przeparametryzować do postaci

$$\mathbf{y}^*(\gamma, \lambda) = \mathbf{y}^*(1 + \gamma_1, 1 + \lambda_1) = 1/3 \cdot (\tilde{\mathbf{y}}_D^* + \gamma_1 \cdot \mathbf{w} + \lambda_1 \cdot \mathbf{v})$$

skonstruowanej na podstawie wektorów \mathbf{y}_D^* , \mathbf{w} , \mathbf{v} , gdzie teraz punkt D trapezu ABCD (rys. 2) pokrywa się z początkiem układu współrzędnych $O\gamma_1\lambda_1$. Wtedy podobnie jak poprzednio przyjmujemy $\Delta b_4 = \Delta b_6 = 0$ oraz rozwiązujemy ostatnią z poniższych równości:

$$\begin{aligned} \Delta FC_{MD}(\Delta \mathbf{b}; \gamma_1, \lambda_1) &= \frac{1}{3} \cdot (\Delta \mathbf{b})^T \cdot [\tilde{\mathbf{y}}_D^* + \gamma_1 \cdot \mathbf{w} + \lambda_1 \cdot \mathbf{v}] = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \Delta b_3 \\ 0 \\ \Delta b_5 \\ 0 \end{bmatrix}^T \cdot \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{4}{3} \cdot \Delta b_1, \end{aligned}$$

gdzie warunki $(\Delta \mathbf{b})^T \cdot \mathbf{w} = 0$ oraz $(\Delta \mathbf{b})^T \cdot \mathbf{v} = 0$ przyjmują postać $-2\Delta b_3 - \Delta b_5 = 0$ oraz $\Delta b_1 + \Delta b_3 = 0$. Stąd $\Delta \mathbf{b} = \Delta b_1 \cdot [1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 2 \ 0]^T + \Delta b_2 \cdot [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

Oznacza to, że spadek łącznych kosztów aż o wysokość $1 \cdot (3) \cdot 20 \approx 26.67$ jednostek pieniężnych w drodze zmniejszenia minimalnego zapotrzebowania na wodę o dozwolone jedynie $\Delta b_1 = 20$ jednostek z 200 do 180 jednostek można uzyskać poprzez równoczesny (dopuszczalny) wzrost prawej strony trzeciego (technicznego) warunku ograniczającego WO_3 o 20 jednostek oraz spadek prawej strony piątego warunku ograniczającego WO_5 o 40 jednostek, przy dopuszczalnym spadku prawej strony drugiego warunku ograniczającego WO_2 o 100 jednostek. Tym razem należy zachować proporcje zmian $\Delta b_3/\Delta b_1 = -1$ oraz $\Delta b_5/\Delta b_1 = 2$.

Wybór pomiędzy tymi dwoma rozwiązaniami a) i b) wymaga dodatkowych informacji o postoptymalizowanym systemie zaopatrzenia w wodę.

3. Dyskusja nad alternatywnymi scenariuszami

3.1. Dwa scenariusze

Zauważamy, że jak w a) zawarte w tabeli 3 zera dla cen dualnych $y_{B_3}^*$ oraz $y_{B_6}^*$ wskazują, że jedynie techniczne wiążące warunki ograniczające WO_3 oraz WO_6 współtowarzyszą łącznie z wiążącym WO_1 przy wyłącznej eksploatacji niezerowej wartości $y_{B_1}^* = 0$. (6). Zaś jak w b) wykorzystanie wyłącznie $y_{D_1}^* = 1$. (3) oznacza większą korzyść finansową przy mniejszym spadku minimalnego zapotrzebowania na wodę, lecz wymaga to jednocześnie nieco innego zakresu interwencji związanej z technicznym wiążącym warunkiem ograniczającym WO_3 oraz ograniczeniem parametru związanego z prawą stroną innego warunku ograniczającego WO_5 , gdyż $y_{D_3}^* = y_{D_5}^* = 0$. Zatem wybór pomiędzy tymi dwoma rozwiązaniami wymaga pełnego rozważenia informacji o postoptymalizowanym systemie zaopatrzenia w wodę zarówno ujętych w modelu jak i dodatkowych informacji spoza modelu.

Fakt wskazanej powyżej konieczności jednoczesnej proporcjonalnej zmiany kilku parametrów systemu zaopatrzenia w wodę wynika z poniższej szerszej uwagi.

3.2. Interpretacja zerowych cen dualnych

Usunięcie warunku ograniczającego w MP skutkuje usunięciem odpowiadającej mu zmiennej dualnej z MD . A pozostawienie tej zmiennej dualnej w MD_1 równoważnym z MD

wymaga uznania, że w rozwiązaniu optymalnym dla MD_1 wartość tej zmiennej dualnej wynosi zero. Również niewiążącym warunkom ograniczającym w MP odpowiadają zerowe wartości zmienne dualne w MD . Zatem zerowanie się pewnych zmiennych dualnych wynika z istniejących już luzów w warunku niewiążącym lub wskazuje, że aby wykorzystać pozostałe niezerowe wartości w całym wektorze dualnym zachodzi ewentualna konieczność dokonania niezerowych zmian w prawej stronie warunku ograniczającego tam, gdzie wektor dualny się zeruje. Innymi słowy, zerowej optymalnej wartości zmiennej dualnej odpowiada 1) warunek niewiążący w MP albo 2) brak tej zmiennej dualnej w MD . Z kolei brak zmiennej dualnej w MD wynika z usunięcia skutków odpowiedniego warunku ograniczającego w MP co odpowiada pełnemu rozluźnieniu wiązań wynikających z tego warunku ograniczającego lub należytym zmianie wartości prawej strony tego warunku ograniczającego. Oznacza to, że zerowej wartości zmiennej dualnej przy warunku niewiążącym w MP odpowiada możliwość samodzielnej zmiany wartości prawej strony tego warunku ograniczającego. Zaś zerowej wartości zmiennej dualnej przy warunku wiążącym w MP odpowiada ewentualna konieczność łącznej zmiany wartości prawej strony tego warunku ograniczającego w przypadku próby zmiany prawej strony innego wiążącego warunku w MP o odpowiadającej mu niezerowej wartości ceny dualnej.

3.3. Dodatkowe scenariusze techniczne

Na podstawie ostatniego stwierdzenia zauważamy, że spadek zużycia wody (tj. spadek wartości prawej strony WO_1) może być również konsekwencją sześciu dalszych scenariuszy zmieniających: c) prawe strony wiążących warunków WO_3, WO_4, WO_5 w MP przy wykorzystaniu odpowiadającym im niezerowych wartości $y_{A_3}^*, y_{A_4}^*, y_{A_5}^*$ wektora \mathbf{y}_A^* cen dualnych; d) prawe strony wiążących warunków WO_3, WO_4, WO_6 w MP przy wykorzystaniu odpowiadającym im niezerowych wartości $y_{C_3}^*, y_{C_4}^*, y_{C_6}^*$ wektora \mathbf{y}_C^* cen dualnych. Konstrukcja tych scenariuszy wymaga m.in. analogicznych reparametryzacji przesuwających początek układu współrzędnych odpowiednio do wierzchołków A oraz C trapezu. Każdy z tych razem ośmiu scenariuszy zmniejszenia zużycia wody przynosi odrębne zmiany w łącznych kosztach zużywanej wody. Scenariusze te są konsekwencjami wykorzystania pojedynczo ośmiu z 12 niezerowych wartości cen dualnych występujących dla węzłów zbioru ABCD. Cztery pozostałe niezerowe wartości nie przynoszą scenariuszy z efektem w postaci zmniejszenia zużycia wody. O wyborze z tych 8 najlepszego scenariusza $\Delta \mathbf{b}$ lub kombinacji liniowej dwóch najlepszych z nich zdecyduje szczegółowa analiza m.in. konsekwencji finansowych, technicznych, biologicznych, ekologicznych, społecznych powiązanych z tymi scenariuszami. Wśród rozważanych warunków ograniczających te, które wynikają z zasady nienaruszalności przepływu wody w rzece albo konsekwentnie nie ulegają one zmianie lub należy je też zmodyfikować na drodze prawnej, ekonomicznej lub poprzez dodatkowe kroki techniczne.

Dla wektorów $\Delta \mathbf{b}$ położonych na jednostkowej sferze w \mathbf{R}^6 tj. gdy

$$|\Delta \mathbf{b}| = \sqrt{\sum_{j=1}^6 (\Delta b_j)^2} = 1,$$

wówczas zmiana wartości funkcji celu jako iloczyn skalarny:

$$\Delta F_{C_{MD}}(\Delta \mathbf{b}; \gamma, \lambda) = (\Delta \mathbf{b})^T \cdot \mathbf{y}^*(\gamma, \lambda)$$

osiąga wartość: i) maksymalną, gdy wektory $\Delta \mathbf{b}$ oraz $\mathbf{y}^*(\gamma, \lambda)$ mają identyczny kierunek i zwrot; ii) minimalną, gdy wektory $\Delta \mathbf{b}$ oraz $\mathbf{y}^*(\gamma, \lambda)$ mają identyczny kierunek i przeciwny zwrot; iii) zerową, gdy wektory $\Delta \mathbf{b}$ oraz $\mathbf{y}^*(\gamma, \lambda)$ są ortogonalne. Fakty te decydują o wyborze scenariuszy o ekstremalnych lub zerowych zmianach łącznych kosztów zużywanej wody i wymagają odrębnej analizy podobnie jak wymienione w rozdziale 1.5 pozostałe 7 typów analizy postoptymalizacyjnej.

O znaczeniu uzyskanego tu wyniku może świadczyć fakt, że dotychczas część badaczy z uwagi na trudności analityczne i interpretacyjne w ogóle odradzała opracowywanie podobnej

analizy [8, p. 44]. Autorzy oprócz *MP* wspomagają się *MD* i różnorodnością oprogramowania, by uniknąć konieczności budowy algorytmu permutacyjnego wspierającego programowanie liniowe celem generowania wszystkich rozwiązań węzłowych w trapezie ABCD. O złożoności obliczeń analitycznych niech świadczy brak możliwości odtworzenia na podstawie tabel 5 i 6 kroków powrotnych do tabeli 3 pozwalających powrócić do początkowego *MP*. Zaś udostępniona w tabeli 6 analiza postoptimalizacyjna, wskazuje możliwość dalszej rekurencyjnej modyfikacji rozważanego systemu poboru wody. Lecz wymaga to powtarzania kroków analitycznych podobnych do tych opisanych tu wyżej. Oczywiście każdorazowe zmiany prawych stron warunków ograniczających w modelu w rozsądnym zakresie winny odzwierciedlać potrzeby eksploatacyjne aglomeracji i możliwości środowiskowe systemu hydrologicznego.

4. Wnioski

1. W swojej klasycznej postaci modele programowania liniowego dla eksploatacji złożonych systemów technicznych najczęściej w raportach wrażliwości zawierają niejednoznaczne odpowiedzi. Stąd w rozdziale 1.4 krytycznie oceniono niektóre wyniki prezentowane w literaturze a odnoszące się do ceny dualnej wody. Ponieważ praca ta poświęcona jest usunięciu zawodności standardowych idealistycznych procedur analizy wrażliwości łączących wartość każdej ceny dualnej wyłącznie ze zmianą tylko pojedynczego parametru prawych stron warunków ograniczających, dlatego zaproponowana tu metodyka postoptimalizacyjna może być szeroko wykorzystana przez inżynierów nie tylko w zarządzaniu procesami eksploatacji.
2. Wnioskowanie o rynkowej cenie wody w oparciu o niejednoznaczną cenę dualną (a takie sytuacje występują w zagadnieniach technicznych prawie zawsze [29]) prowadzi do:
 - a) braku rozpoznania wielu scenariuszy modyfikacji systemu wodociągowego, a ewentualny wybór przypadkowego scenariusza może wymagać konieczności przeprowadzenia trudnej lub nawet niemożliwej do osiągnięcia modernizacji systemu wodociągowego.
 - b) uzyskania mniejszych, niż dających się osiągnąć na innej drodze, oszczędności w funkcjonowaniu systemu wodociągowego.Prezentując zręby scenariuszy technicznych dla uproszczonego przykładu autorzy artykułu prezentują metodykę:
 - ad. a) identyfikacji, poprzez warunki ograniczające, części systemu wodociągowego, podlegających zmianie przy wdrażaniu różnych scenariuszy technicznych,
 - ad. b) znajdowania różnych oszczędności powiązanych z wdrażaniem alternatywnych scenariuszy, co pozwala wybrać najlepszą modyfikację systemu.
3. Opracowana w pracy metodyka umożliwia wygenerowanie ośmiu alternatywnych scenariuszy technicznych oszczędzania wody, z których nakreślono zręby dwóch.
4. Wyznaczane w pracy proporcje składowych $\Delta \mathbf{b}$ służą do uproszczenia i poprawienia procedur jedno i wieloparametrycznego programowania liniowego [54]. A procedury te to również analiza postoptimalizacyjna przy funkcjonalnej zależności zmian parametrów prawych stron warunków ograniczających lub zmian współczynników funkcji celu i są analogiczne do przypadku postoptimalizacji typu 6 z rozdziału 1.5. Problemy te nie są opisane w literaturze, a ulegają dalszej komplikacji przy większej ilości zmiennych decyzyjnych.
5. Praca zawiera zastosowanie wektorów dualnych \mathbf{y}^* oraz wektorów \mathbf{w} , \mathbf{v} ortogonalnych do \mathbf{b} przy wyznaczaniu efektywnych proporcjonalnych zmian $\Delta \mathbf{b}$. Tym samym uogólnia znaczenie wektorów bilansujących w modelu transportowym a ortogonalnych do \mathbf{b} i pozwala uogólnić metodę macierzy cen dualnych [24, 55-58] na modele z nierównościami warunkami ograniczającymi.

6. Przedstawiona powyżej metodyka może być bezpośrednio dostosowana do postoptymalizacji różnych procesów eksploatacji złożonych systemów technicznych np.:
 - a. w systemie poboru wody dla aglomeracji miejskiej z kilku źródeł przy różnych warunkach eksploatacyjnych [9-10, 57];
 - b. do kosztów eksploatacji innych wieloźródłowych systemów np. dostaw gazu w miejskiej sieci gazowej [34, 50];
 - c. do kosztów eksploatacji aparatury medycznej i infrastruktury technicznej [51];
 - d. w zagadnieniach doskonalenia rejonizacji stacji ratownictwa medycznego [39, 52];
 - e. do średnich czasów przebywania systemów w podzbiorach stanów niezawodnościowych [31-32].
7. Obecnie autorzy prowadzą prace nad pełną algorytmizacją prezentowanej tu metodyki.

Literatura

1. Abdy Sayyed M A H, Gupta R, Tanyimboh T T. Flow-based penalty in GA for optimal design of water distribution network. Hydro-2017 International, L.D.College of Engineering, Ahmedabad, India, 2017; 1439 – 1446.
2. Agyei E, Munch D, Burger P. Application of Optimization Modeling to Water Resource Planning in East-Central Florida. Technical Publication SJ2005-2. St. Johns River Water Management District, Palatka, Florida, 2005
ftp://secure.sjrwmd.com/technicalreports/TP/SJ2005-2.pdf.
3. Amani N, Ali N M, Mohammed A H, Samat R A. Maintenance and management of wastewater system components using the condition index system, prediction process and costs estimation. Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability 2013; 15(2):161–168.
4. Arsham H. Construction of the largest sensitivity region for general linear programs. Appl. Math. Comput. 2007; 189(2):1435–1447.
5. Arsham H, Oblak M. Perturbation analysis of general LP models: a unified approach to sensitivity, parametric, tolerance, and more-for-less analysis. Math Comput. Model. 1990; 13(8):79–102.
6. Bradley S P, Hax A C, Magnanti T L. Applied mathematical programming. Addison-Wesley Publishing Company, Boston, 1977.
7. Brown L R. 2030, Who will feed China? World watch, 1994.
8. Busłowski A. Stabilność rozwiązania optymalnego zadania programowania liniowego. Wyd. Uniwersytetu w Białymstoku, 2000.
9. Chmielowski W. Zastosowania optymalizacji w gospodarce wodnej. Wyd. Politechniki Krakowskiej, 2005.
10. Chmielowski W. Management of Complex Multi-reservoir Water Distribution Systems using Advanced Control Theoretic Tools and Techniques. Springer-Verlag, 2013.
11. Conradie B I, Hoag D L. A review of mathematical programming models of irrigation water values. Water SA 2004; 30(3):287-292.
12. Dantzig G B, Thapa M N. Linear programming. 1: Introduction. New York, Berlin, Heidelberg: Springer 1997.
13. Datta B, Harikrishna V. Optimization Applications in Water Resources Systems Engineering. Research Journal of IIT Kanpur 2005:57-64.
14. Drobny N L. Linear programming applications in water resources 1. Journal of the American Water Resources Association 1971; 7(6):1180-1193.
15. Easter K W, Rosegrant M W, Dinar A. Markets for water: Potential and performance. Springer Science & Business Media, 1998.

16. Ehrgott M, Wiecek M M. Multiobjective programming. *International Series in Operations Research and Science* 2005;667-722
17. European Commission. Report on the Review of the European Water Scarcity and Droughts Policy; European Commission: Brussels, Belgium, 2012.
18. Freire-González J, Decker C A, Hall J W. A Linear Programming Approach to Water Allocation during a Drought. *Water* 2018; 10(4):363.
19. Frizzone J A, Coelho R D, Dourado-Neto D, Soliani R. Linear programming model to optimize the water resource use in irrigation projects: An application to the Senator Nilo Coelho Project. *Scientia Agricola* 1997; 54(SPE):136-148.
20. Gale D, Kuhn H W, Tucker A W. Linear programming and the theory of games, *Activity Analysis of Production and Allocation*, Ed. TC Koopmans, 1951.
21. Gass S I, Saaty T L. Parametric objective function (part 2)-generalization. *Oper. Res.* 1955; 3(4):395–401.
22. Gibbons D. *The Economic Value of Water. Resources for the Future.* Publisher: Resources for the Future, Washington, 1986.
23. Hanafizadeh P, Ghaemi A, Tavana M. Local perturbation sensitivity analysis of linear programming with functional relation among parameters. *Int. J. Oper. Res. Inf. Syst.* 2011; 2(1):42–65.
24. Ignaciuk S. Post-optimization procedures for the selected transport issues in agricultural engineering. PhD thesis. Department of Applied Mathematics and Computer Science, Faculty of Production Engineering, University of Life Sciences in Lublin (in Polish), 2018.
25. Jacovkis P M, Gradowczyk H, Freisztav A M, Tabak E G. A linear programming approach to water-resources optimization. *Zeitschrift für Operations Research* 1989; 33(5):341-362.
26. Jansen B, de Jong J J, Roos C, Terlaky T. Sensitivity analysis in linear programming: just be careful!. *European Journal of Operational Research* 1997; 101(1):15-28.
27. Keshari A K, Datta B. Multiobjective Management of a Contaminated Aquifer for Agricultural Use. *Water Resources Management* 1996; 10(5):373-395.
28. Klabjan D, Adelman D. Existence of optimal policies for semi-Markov decision processes using duality for infinite linear programming. *Siam Journal on Control and Optimization* 2006; 44(6): 2104-2122.
29. Koltai T, Terlaky T. The difference between the managerial and mathematical interpretation of sensitivity analysis results in linear programming. *Int. J. Production Economics* 2000; 65: 257-274.
30. Koltai T, Tatay V. A practical approach to sensitivity analysis in linear programming under degeneracy for management decision making. *Int. J. Production Economics* 2011; 131: 392-398.
31. Kołowrocki K, Soszyńska J. Optymalizacja procesów eksploatacji złożonych systemów technicznych. *Problemy Eksploatacji* 2010; 31-40.
32. Kolowrocki K, Soszynska-Budny J. *Reliability and Safety of Complex Technical Systems and Processes: Modeling – Identification – Prediction- Optimization.* Springer Science & Business Media, 2011.
33. Kołowrocki K, Soszyńska J. Integrated safety and reliability decision support system. *Journal of KONBiN* 2011; 20(1): 17-28.
34. Li J, Yan M, Yu J. Evaluation on gas supply reliability of urban gas pipeline network. *Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2018; 20(3): 471–477, <http://dx.doi.org/10.17531/ein.2018.3.17>.
35. Lipinski P, Filipiak P, Rychlikowski P, Stanczyk J, Kajewska-Szkudlarek J, Lomotowski J, Konieczny T. Discovering weekly seasonality for water demand

- prediction using evolutionary algorithms. In *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion 2017*.07; 33-34.
36. Liu X, Chen X, Wang S. Evaluating and Predicting Shadow Prices of Water Resources in China and its Nine Major River Basins. *Water Resour. Manag.* 2009; 23(8):1467–1478.
 37. Madadpour S, Hanafizadeh P, Habibi R. Sensitivity Analysis of Asset Allocation: In The Presence of Correlation. *Journal of Accounting, Finance and Auditing Studies* 2018; 4(1):151-166.
 38. Malinowski J. A newly developed method for computing reliability measures in a water supply network. *Operations Research and Decisions* 2016; 26(4):49–64.
 39. Manikowski A. Optymalizacja rejonizacji Stacji Ratownictwa Medycznego z wykorzystaniem zmodyfikowanego zagadnienia transportowego na przykładzie Warszawy. *Problemy Zarządzania* 2011; 9(3): 227 – 241.
 40. Mavrotas G. Effective implementation of the ϵ -constraint method in Multi-Objective Mathematical Programming problems. *Applied Mathematics and Computation* 2009; 213(2): 455-465.
 41. McKee P W, Clark B R, Czarnecki J B. Conjunctive-use optimization model and sustainable-yield estimation for the Sparta aquifer of southeastern Arkansas and north-central Louisiana. *Water-Resources Investigations Report* 2003; 2003-4231, <https://doi.org/10.3133/wri034231>
 42. Nieuwoudt W L, Backeberg G R. A review of the modelling of water values in different use sectors in South Africa. *Water SA* 2011; 37(5): 703-710.
 43. Połomska J, Chmielowski W. Optimization of water management system operation while quality and quantity of water determined. *Annals of Warsaw University of Life Sciences-SGGW. Land Reclamation* 2012; 44(1): 15-24.
 44. Romaniuk M. Optimization of maintenance costs of a pipeline for a V-shaped hazard rate of malfunction intensities. *Eksploracja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2018; 20(1):46–56.
 45. Romaniuk M. Application of Markov chain and interest rate process for forecasting of costs of maintenance of pipelines. In: *Simulation in Umwelt-und Geowissenschaften. Workshop Müncheberg*. 2015; p. 147-156.
 46. Romaniuk M. On simulation of maintenance costs for water distribution system with fuzzy parameters. *Eksploracja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2016; 18(4):514–527, <https://doi.org/10.17531/ein.2016.4.6>.
 47. Saaty T L, Gass S I. Parametric objective function (part 1). *Oper. Res.* 1954; 2(3):316–319.
 48. Shahin A., Hanafizadeh P, Hladík M. Sensitivity analysis of linear programming in the presence of correlation among right-hand side parameters or objective function coefficients. *Central European Journal of Operations Research* 2016; 24(3): 563-593.
 49. Sioshansi R, Conejo A J. *Optimization in Engineering: Models and Algorithms* (Vol. 120). Springer, 2017.
 50. Słowiński B. *Inżynieria eksploatacji maszyn*. Wyd. Politechniki Koszalińskiej, 2014.
 51. Sukharev M G, Karasevich A M. Reliability models for gas supply systems. *Automation and Remote Control* 2010; 71(7): 1415–1424, <https://doi.org/10.1134/S0005117910070155>.
 52. Taha H A. *Operations research: An introduction*. Prentice Hall, 2007.
 53. Wang Z. *The linear programming model of water resource utilization in the irrigated area of Huaibei*, Institute of Water Resource of Huai River Committee and Anhui Province, Bengbu, 2018

www.hyarc.nagoya-u.ac.jp/game/6thconf/html/abs_html/pdfs/T7MWZ30Jul04203305.pdf.

54. Ward J E, Wendell R E. Approaches to sensitivity analysis in linear programming. *Ann. Oper. Res.* 1990; 27(1):3–38.
55. Wawrzosek J, Ignaciuk S. Use of extended sensitivity reports of linear programming in emergency medicinal services issues. *Logistyka (Poznan)* 2015; No 4 attachment CD ROM no 2 part 5: 8473-8481 (in Polish).
56. Wawrzosek J, Ignaciuk S. Selected postoptimization problems of the logistics of supplying urban-industrial agglomerations with water. *Logistyka (Poznan)* 2016; No 1 attachment CD ROM part 2: 425-431 (in Polish).
57. Wawrzosek J, Ignaciuk S. Dual model for classic transportation problem as a tool for dynamizing management in a logistics company. *Econtechmod* 2016; 5(3): 95-100.
58. Wawrzosek J, Ignaciuk S. Postoptimization of the model of water supply for urban and industrial agglomeration. XLVIII Seminar of Applied Mathematics, ITM Web of Conferences 23, 00035, 1-5, <https://doi.org/10.1051/itmconf/20182300035>.
59. Wendell R E. A preview of a tolerance approach to sensitivity analysis in linear programming. *Discrete Math.* 1982; 38(1):121–124.
60. Wendell R E. Using bounds on the data in linear programming: the tolerance approach to sensitivity analysis. *Math. Program.* 1984; 29(3):304–322.
61. Wendell R E. The tolerance approach to sensitivity analysis in linear programming. *Manag Sci.* 1985; 31(5):564–578.
62. Wendell R E. Sensitivity analysis revisited and extended. *Decision Sciences* 1992; 23(5): 1127-1142.
63. Wondolowski F R. A generalization of Wendell's tolerance approach to sensitivity analysis in linear programming. *Decis Sci* 1991; 22(4):792–811.
64. World Bank. High and Dry: Climate Change, Water, and the Economy; World Bank: Washington, DC, USA, 2016.
65. <http://www.maslowski.pl/index.php?id=simplex>
66. Zio E. An introduction to the basics of reliability and risk analysis. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2006.